краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности» в рамках научного проекта №16-41-240670.

Литература

1. Александров А. Д. *Выпуклые многогранники.* – Новосибирск: Наука, 2007. – 492 с.

2. Циглер Г. М. *Теория многогранников.* – М.: МЦНМО, 2014. – 568 с.

ON POLYHEDRA WITH RHOMBIC FACES AND PARALLELOHEDRA

V.I. Subbotin

The article establishes the connection between three-dimensional parallelohedra and certain convex polyhedra with rhombic faces. It is proved that every so-called regular parallelohedron can be obtained by transforming an elongation or cutting off vertices from some convex polyhedron with rhombic faces.
Keywords: Polyhedron with rhombic faces, transformation of elongation, regular parallelohedron.

УДК 514.76

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОДНОГО ТИПА ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ

А.Я. Султанов[1]

1 *sultanovaya@rambler.ru*; Пензенский государственный университет

В настоящей заметке устанавливается максимальная размерность алгебр Ли $g(\nabla)$ инфинитезимальных аффинных преобразований многообразия M размерности n, снабженного линейной связностью ∇. Предполагается, что многообразие M является связным и имеющим класс гладкости C^∞, а линейная связность ∇ – не имеющей кручения, то есть с нулевым тензорным полем кручения T.

Ключевые слова: Дифференцируемое многообразие, линейная связность, инфинитезимальное аффинное преобразование, алгебра Ли.

1. Основные понятия

Пусть M – связное n-мерное вещественное многообразие размерности n, $C^\infty(M)$ – алгебра гладких класса C^∞ функций, заданных на M, $\Im_0^1(M)$ – модуль векторных полей над алгеброй $C^\infty(M)$ на M.

Определение 1.1 [1]. *Линейной связностью на M называется отображение $\Im_0^1(M)\times\Im_0^1(M)\to\Im_0^1(M)$ (обозначаемое $\nabla(X,Y)=\nabla_X Y$), удовлетворяющее следующим условиям:*

$$\nabla_X(Y+Z)=\nabla_X Y+\nabla_X Z,$$

$$\nabla_X(fZ)=f\nabla_X Y+(Xf)Z,$$

$$\nabla_{X+Y}Z=\nabla_X Z+\nabla_Y Z,$$

$$\nabla_{fX}Y=f\nabla_X Y$$

для любых $f\in C^\infty(M)$, $X,Y,Z\in\Im_0^1(M)$.

Тензорные поля T и кривизны R связности ∇ определяются следующими тождествами, соответственно:

$$T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y];\tag{1.1}$$

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z.\tag{1.2}$$

Если (U,x^i) – карта с областью определения U, $\partial_i=\frac{\partial}{\partial x^i}\in\Im^1_0(U)$, то можно определить компоненты Γ^k_{ij} связности ∇ из соотношений

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j=\Gamma^k_{ij}\partial_k.$$

Условие обращения в нуль тензорного поля T кручения равносильно следующим равенствам:

$$\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji},$$

которые следуют из (1.1). Полагая $R(\partial_k,\partial_l)\partial_j=R^i_{jkl}\partial_i$, получим [2]:

$$R^i_{jkl}=\partial_k\Gamma^i_{lj}-\partial_l\Gamma^i_{kj}+\Gamma^m_{lj}\Gamma^i_{km}-\Gamma^m_{kj}\Gamma^i_{lm}.$$

Определение 1.2. [3] *Векторное поле X называется инфинитезимальным аффинным преобразованием, если $L_X\nabla=0$.* Здесь $L_X\nabla$ – производная Ли линейной связности ∇ вдоль векторного поля X.

Пусть в карте (U,x^i) векторное поле X представлено равенством

$$X=X^i\partial_i.$$

Тогда условие того, что X – инфинитезимальное аффинное преобразование, равносильно системе дифференциальных уравнений

$$\partial_j\partial_k X^i+\Gamma^i_{mk}\partial_j X^m+\Gamma^i_{jm}\partial_k X^m-\Gamma^m_{jk}\partial_m X^i+X^m\partial_m\Gamma^i_{jk}=0.\tag{1.3}$$

Эта система представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Введем новые неизвестные функции $X^i_j=\partial_j X^i$. Тогда система (1.3) будет равносильна системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, разрешенной относительно всех производных

$$\partial_j X^i=X^i_j,\partial_j X^i_k-\Gamma^i_{mk}\partial_j X^m-\Gamma^i_{jm}\partial_k X^m+\Gamma^m_{jk}\partial_m X^i-X^m\partial_m\Gamma^i_{jk}.\tag{1.4}$$

Первую серию условий интегрируемости этой системы можно представить в виде соотношений

$$X^m\partial_m R^i_{jkl}+R^i_{mkl}X^m_j+R^i_{jml}X^m_k+R^i_{jkm}X^m_l-R^m_{jkl}X^i_m=0.\tag{1.5}$$

Остальные серии получаются путем дифференцирования предыдущих серий и последующей замены частных производных по формулам (1.4). Систему (1.5) представим следующим образом:

$$X^m\partial_m R^i_{jkl}+R\left({}^{i}_{jkl}\middle|{}^{s}_{m}\right)X^m_s=0,\tag{1.6}$$

где
$$R(^{i}_{jkl}|^{s}_{m}) = \delta^s_j R^i_{mkl} + \delta^s_k R^i_{jml} + \delta^s_l R^i_{jkm} - \delta^i_m R^s_{jkl}. \qquad (1.7)$$
Будем считать, что набор индексов $(^{i}_{jkl})$ соответствует уравнению системы (1.5).

Множество $g(\nabla)$ всех инфинитезимальных аффинных преобразований линейной связности ∇ образует векторное пространство над полем действительных чисел относительно естественных операций сложения векторных полей и умножения их на скаляры. Более того, коммутатор любых двух инфинитезимальных аффинных преобразований является инфинитезимальным аффинным преобразованием. Поэтому, векторное пространство $g(\nabla)$ с операцией коммутирования является алгеброй Ли. Эта алгебра конечномерна и $dim_{\mathbb{R}} g(\nabla) \le n^2 + n$, где n – размерность многообразия M.

2. Оценка сверху размерностей алгебр Ли $g(\nabla)$

Будем исследовать многообразия M, снабженные линейными связностями, тензорные поля кривизны которых удовлетворяют следующим условиям:

(1) компоненты вида $R^{i_1}_{i_2 i_2 i_3}$ равны нулю в координатных окрестностях каждой точки $p \in M$ для попарно различных индексов i_1, i_2, i_3;

(2) существует координатная окрестность (U, x^i) точки $q \in M$, в которой компонента вида $R^{i_1}_{i_2 i_3 i_4}(q)$ в точке q отлична от нуля для некоторых попарно различных индексов i_1, i_2, i_3, i_4, причем в тождестве Бианки в равенстве, содержащем эту компоненту, только два отличных от нуля слагаемых.

Имеет место

Теорема. *Максимальная размерность алгебр Ли $g(\nabla)$ для связностей ∇, удовлетворяющих перечисленным выше условиям (1) и (2), равна точно $n^2 - 3n + 6 (n \ge 4)$.*

Доказательство. Предположим, что условия (1) и (2) выполнены для тензорного поля кривизны R связности ∇. Можно считать, что $i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3, i_4 = 4$.

Пусть $R^1_{234}(q) = a \ne 0, R^1_{342}(q) = -a, R^1_{423}(q) = 0$. Составим матрицу из коэффициентов $R(^{i}_{jkl}|^{s}_{m})$ уравнений (1.6) со строками $(^{h}_{234})(h > 1)$, $(^{1}_{l34})$, $(^{1}_{2l4})$, $(^{1}_{23l})(l > 4)$, $(^{1}_{234})$, $(^{1}_{334})$, $(^{1}_{224})$, $(^{1}_{232})$, $(^{1}_{434})$, $(^{1}_{424})$, $(^{1}_{323})$, столбцами $(^{1}_{s})(s > 1)$, $(^{s}_{1})(s > 1)$, $(^{t}_{2})$, $(^{t}_{3})$, $(^{t}_{4})(t > 4)$, $(^{1}_{1})$, $(^{3}_{2})$, $(^{2}_{3})$, $(^{2}_{4})$, $(^{4}_{2})$, $(^{4}_{3})$, $(^{3}_{4})$.

Эти коэффициенты вычисляются по формулам (1.7). Полученная матрица является квадратной порядка $4n - 6$, все элементы которой, находящиеся ниже главной диагонали равны нулю, а диагональные элементы равны либо a, либо $-a$, либо $2a$. Поэтому, ранг полученной матрицы равен $4n - 6$. Так как система (1.6) – однородная система линейных уравнений, число переменных X^i, X^i_j в ней $n^2 + n$, то размерность алгебры Ли $g(\nabla)$ не превосходит $n^2 - 3n + 6$. Для установления точности полученной оценки рассмотрим пространство $(\mathbb{R}^n, \nabla)$, где линейная связность ∇ задается компонентами $\Gamma^1_{23} = x^4$, другие $\Gamma^k_{ij} = 0$, предложенное Г. Вранчану. И.П. Егоров установил, что для этой связности $dim_{\mathbb{R}}(\nabla) = n^2 - 3n + 6$ [3]. Теорема доказана полностью.

Литература

1. Громол Д. *Риманова геометрия в целом. Пер. с нем. Ю.Д. Бураго. Под ред. и с добавлением В.А. Топоногова.* – М.: Мир, 1971. – 344 с.

2. Кобаяси Ш. *Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. Перевод с англ. Л.В.Сабинина.* — М.: Наука, 1981. – 344 с.

3. Егоров И. П. *Движения в пространствах аффинной связности* – Казань: Изд-во Казанского гос.унив-та, 1965. — С. 5-179.

AFFINE TRANSFORMATIONS ONE TYPE OF LINEAR CONNECTION

A.Ya. Sultanov

In this note we establish the maximal dimension of the Lie algebras $g(\nabla)$ of infinitesimal affine transformations of a manifold M of dimension n, equipped with a linear connection ∇. It is assumed that the manifold M is connected and having the smoothness class C^∞, and the linear connection ∇ is not having torsion, that is, with a zero tensor torsion field T.

Keywords: Differential manifold, linear connection, infinitesimal affine transformation, the maximal dimension, algebra of Lie.

УДК 514.76

ОБ АЛГЕБРАХ ЛИ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ СО СВЯЗНОСТЬЮ ПОЛНОГО ЛИФТА НАД ДВУМЕРНЫМИ МАКСИМАЛЬНО-ПОДВИЖНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

Г.А. Султанова[1]

1 *sultgaliya@yandex.ru*;

В работе исследуются максимальные размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения TM_2 со связностью $\nabla^{(0)}$ над максимально-подвижным двумерным пространством (M_2, ∇).

Ключевые слова: Касательное расслоение, инфинитезимальное аффинное преобразование, алгебра Ли, максимально-подвижное пространство.

Пусть M – связное дифференцируемое многообразие класса C^∞ размерности n, TM – касательное расслоение над многообразием M. Приведем определения лифтов функций, векторных полей и линейных связностей с базы в касательное расслоение. Для функции $f \in C^\infty(M)$ функция $f_{(0)} = f \circ \pi$ называется вертикальным лифтом, а функция $f_{(1)} = (\partial_j f)_{(0)} x_1^j$ – полным лифтом функции f с многообразия M в его касательное расслоение TM.

Пусть $X \in \Im_0^1(M)$, где $\Im_0^1(M)$ – модуль векторных полей над алгеброй $C^\infty(M)$ на M. Векторные поля $X^{(1)}$ и $X^{(0)}$ называются вертикальным и полным лифтами векторного поля X, соответственно, в локальных координатах определяемые соотношениями $X^{(1)} = (X^i)_{(0)}\partial_i^1$, $X^{(0)} = (X^i)_{(0)}\partial_i^0 + (\partial_j X^i)_{(0)} x_1^j \partial_i^1$ [6].